

MASTER ACTUARIAT

PARCOURS ACTUARIAT

Semestre 8

Mathématiques Stochastiques 2

Présentation

1. Mathématiques des populations :

I. Modèles déterministes

i. Modèles déterministes en temps discret :

- Modèle d'Euler (ou de Malthus)
- Modèle logistique de Verhulst
- Populations à comportement chaotique (travaux de May)
- Modèles avec classes d'âges (modèle de Leslie)

ii. Modèles déterministes en temps continu :

- modèle d'Euler, modèle de Verhulst
- $x'(t) = f(x(t))$: solutions stationnaires, stabilité et instabilité
- Modèle de durée de vie de Makeham, de Gompertz

iii. Modèle de Populations en interactions de Lotka- Volterra

- Théorie et schémas numériques (Euler, Runge Kutta)
- Notions de champs de vecteurs et d'isoclines

iv. Modèles déterministes de propagation des épidémies :

- Modèle de Bernoulli pour la variole
- Modèles S.I., S.I.R., S.I.S., modèle de Ross de transmission du paludisme

II. Modèles stochastiques

i. Processus de branchement :

- Modèle probabiliste de Galton Watson
- Fonctions génératrices
- Probabilité d'extinction
- Simulation
- Maximum de vraisemblance

ii. Processus de branchement en temps continu :

- Fonctions génératrices
- Evolution de la moyenne
- Probabilité d'extinction

iii. Modèles probabilistes de naissance et de mort :

- Rappels des notions sur les processus Markoviens à temps continu
- Loi stationnaire, probabilité d'extinction
- Exemples classiques

iv. Modèles de durée :

- Fonction de survie, fonction de hasard
- Exemples de lois classiques : Exponentielle, Weibull (simulation et calibration), Gamma
- Modèle de Gompertz- Makeham : définition et propriétés, simulation, calibration des taux de mortalité par régression et maximum de vraisemblance
- Modèle logistique pour les taux de mortalité
- Exemples numériques en langage R avec des données HMD (Human Mortality Database).
- Modèles de durée composites
- Analyse de la mortalité : quotient et taux de mortalité, fonction de hasard, diagramme de Lexis, mortalité transversale (par année) et longitudinale (par génération)
- Espérance de vie résiduelle
- Notion de censure : censures de type I et III, fonction de vraisemblance avec prise en compte de censures.
- Un exemple : le modèle de Pareto censuré

2. Calcul stochastique appliqué à la finance et assurance :

i. Revisite du modèle de Black-Scholes :

- Modélisation du prix d'action
- Notion de portefeuille admissible
- Portefeuille d'arbitrage
- Probabilité risque neutre

8 crédits ECTS

Volume horaire

Travaux Dirigés : 47h

Travaux Pratiques : 10h

Cours Magistral : 62h

- EDP d'évaluation
- Formule de Black-Scholes pour le call et le put européens
- Les lettres grecques en finance
- Calcul des prix d'options européennes, exotiques, à barrière, forward-start
- ii. Volatilité :
 - Notion de volatilité historique
 - Notion de volatilité implicite
 - Notion de volatilité locale, calibration de la volatilité locale
- iii. Modèles de taux stochastiques :
 - Taux stochastique, obligation zéro-coupon, taux forward instantané, changement de numéraire ;
 - Différents modèles de taux stochastiques (Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross, Hull-White, Black-Karasinski) ;
 - Modèle de HMJ pour le taux forward instantané ;
 - Prix d'un call européen dans le contexte d'un taux stochastique ;
 - Evaluation des caplets, floorlets, caps, floors, swaption ;
 - Echanges de taux (taux swap)

3. Simulation stochastique :

- i. Processus markovien à sauts (présentation des modèles et mise en oeuvre de la simulation)
 - Processus de Poisson homogène
 - File d'attente à 1 serveur et file d'attente M/M/r
 - Processus markoviens
 - Modèle de ruine d'une compagnie d'assurance
- ii. Simulation de trajectoires browniennes et d'autres processus continus (rappels et simulation)
 - Mouvement brownien
 - Processus s'exprimant simplement à l'aide d'un mouvement brownien (intégrale par rapport à un mouvement brownien, brownien géométrique)
 - Pont brownien
- iii. Méthode de Monte Carlo (théorie et simulation)
 - Loi forte des grands nombres (rappel)
 - Expérience de Buffon et méthode de Monte Carlo
 - Variante du théorème central limite avec la variance empirique
 - Intervalles de confiance pour la méthode de Monte Carlo
 - Méthodes de réduction de variance (Variables antithétiques et Variables de contrôle)
- iv. Discrétisation d'EDS (théorie et simulation)
 - Théorème d'Itô (rappel, cadre multidimensionnel)
 - Principe des schémas d'approximation et prise en compte de leurs erreurs dans les intervalles de confiance
 - Schéma d'Euler
 - Schéma de Mil'shtein (pour ces deux schémas: présentation des schémas, théorèmes de convergence et de vitesse, simulation, dimensions 1 et supérieures)

4. Théorie des jeux :

- i. Jeux à somme nulle (à une étape, avec des espaces d'actions finis) :
 - Valeur inférieure et valeur supérieure du jeu (en stratégies pures, en stratégies mixtes)
 - Théorème de von Neumann sur l'existence d'une valeur en stratégie mixtes
 - Extension à des jeux avec espaces d'actions convexes et compacts dans \mathbb{R}^d (Théorème de Sion)
- ii. Jeux matriciels à deux personnes à somme non nulle (à une étape) :
 - Notion d'équilibre de Nash (en stratégies pures, en stratégies mixtes)
 - Théorème de Nash, méthodes de calcul de l'équilibre de Nash
- iii. Jeux matriciel à deux personnes à somme nulle avec information incomplète (où un joueur dispose de plus d'informations que l'autre) :
 - Brève introduction du modèle d'Aumann et Maschler, notions de stratégies pure et mixte pour ce modèle
 - Valeur du jeu en stratégies mixtes à la fin de l'étape T
 - Discussion à l'aide des exemples du comportement de la valeur lorsque T tend vers l'infini
 - Théorème d'Aumann et Maschler sur la valeur du jeu en stratégies mixtes

5. Outils avancés pour la data science :

- i. Méthodes ensemblistes
 - XGBoost et stacking
- ii. Interprétabilité des méthodes de machine learning.
- iii. Projet en data science.

Modalités de contrôle des connaissances

Session 1 ou session unique - Contrôle de connaissances

Nature de l'enseignement	Modalité	Nature	Durée (min.)	Coefficient	Remarques
Cours Magistral	CT	Ecrit - devoir surveillé	120	40/119	+assiduité; i.e.: -0.1x jours d'absence injustifiée
Cours Magistral	CT	Ecrit - devoir surveillé	120	12/119	+assiduité; i.e.: -0.1x jours d'absence injustifiée
Cours Magistral	CT	Ecrit - devoir surveillé	120	35/119	+assiduité; i.e.: -0.1x jours d'absence injustifiée
Cours Magistral	CT	Ecrit - devoir surveillé	120	20/119	+assiduité; i.e.: -0.1x jours d'absence injustifiée
	CT	Oral - soutenance	20	12/119	Soutenance de projet informatique + assiduité

Session 2 : Contrôle de connaissances

Nature de l'enseignement	Modalité	Nature	Durée (min.)	Coefficient	Remarques
Cours Magistral	CT	Ecrit et/ou Oral	60	40/119	Ecrit ou oral suivant le nombre d'étudiants inscrits en session 2
Cours Magistral	CT	Ecrit et/ou Oral	60	12/119	Ecrit ou oral suivant le nombre d'étudiants inscrits en session 2
Cours Magistral	CT	Ecrit et/ou Oral	60	35/119	Ecrit ou oral suivant le nombre d'étudiants inscrits en session 2
Cours Magistral	CT	Ecrit et/ou Oral	60	20/119	Ecrit ou oral suivant le nombre d'étudiants inscrits en session 2
	CT	Oral - soutenance	0	12/119	Report de la note de la première session